Ejercicios Teoría Cuántica de Campos. Capítulo 8

Autor del curso: Javier García

Problemas resueltos por: Roger Balsach

2 de marzo de 2019

Queremos calcular el valor esperado $\langle\phi_a\phi_b\phi_c\phi_d\rangle$ Sabemos que podemos calcularlo a partir del funcional $Z[J]$ definido como

$$Z[J] = \int e^{-S[\phi]+\phi^t J}\mathscr{D}\phi = e^{\frac{J^t A^{-1} J}{2m^2}}\frac{(2\pi)^n}{m^n\sqrt{|A|}} \equiv K e^{\frac{J^t A^{-1} J}{2m^2}} \tag{1}$$

$$\langle\phi_a\phi_b\phi_c\phi_d\rangle = \frac{1}{Z[0]}\left.\frac{\partial}{\partial J_a}\frac{\partial}{\partial J_b}\frac{\partial}{\partial J_c}\frac{\partial}{\partial J_d}Z[J]\right|_{J=0} \tag{2}$$

Escribiendo

$$\frac{J^t A^{-1} J}{2m^2} = a_{ij}x^i x^j, \qquad x^j = J_j,\ a_{ij} = \frac{(A^{-1})_{ij}}{2m^2} \tag{3}$$

Encontramos dos derivadas que nos serán muy útiles:

$$\frac{\partial a_{ij}x^i x^j}{\partial x^d} = a_{ij}\left(\delta^i_d x^j + x^i\delta^j_d\right) = a_{dj}x^j + a_{id}x^i = 2a_{jd}x^j \tag{4}$$

$$\frac{\partial e^{a_{ij}x^i x^j}}{\partial x^d} = e^{a_{ij}x^i x^j}2a_{kd}x^k = 2a_{kd}e^{a_{ij}x^i x^j}x^k \tag{5}$$

Y usando esta derivada calculamos inmediatamente la primera derivada de $Z[J]$:

$$\frac{\partial Z[J]}{\partial x^d} = K\frac{\partial e^{a_{ij}x^i x^j}}{\partial x^d} = K e^{a_{ij}x^i x^j}2a_{kd}x^k = 2a_{kd}K e^{a_{ij}x^i x^j}x^k \tag{6}$$

Ahora para calcular la segunda derivada usamos los mismos trucos

$$\partial_{cd} Z[J] \equiv \frac{\partial^2 Z[J]}{\partial x^c \partial x^d} = 2a_{kd} K \left(\frac{\partial e^{a_{ij}x^i x^j}}{\partial x^c} x^k + e^{a_{ij}x^i x^j} \frac{\partial x^k}{\partial x^c} \right) \tag{7}$$

$$= 2a_{kd} K \left(\frac{\partial e^{a_{ij}x^i x^j}}{\partial x^c} x^k + e^{a_{ij}x^i x^j} \frac{\partial x^k}{\partial x^c} \right) \tag{8}$$

$$= 2a_{kd} K \left(2a_{lc} e^{a_{ij}x^i x^j} x^l x^k + e^{a_{ij}x^i x^j} \delta^k_c \right) \tag{9}$$

$$= 2K \left(2a_{kd} a_{lc} e^{a_{ij}x^i x^j} x^l x^k + e^{a_{ij}x^i x^j} a_{cd} \right) \tag{10}$$

Antes de volver a calcular otra derivada vamos a observar lo que hemos obtenido hasta ahora, ignorando el termino exponencial (que aparece siempre) podemos considerar las ecuaciones como polinomios en x, cuando evaluemos la expresión en $x = 0$ solo sobrevivirá el termino de grado cero (es decir, el que no tenga x). Como podemos ver en (5) la derivada de la exponencial aumenta el grado del polinomio en 1, mientras que las otras derivadas reducen el grado en 1, con esto y considerando que $Z[J]$ tiene grado cero podemos obtener dos conclusiones importantes:

1. Derivar $Z[J]$ un número par/impar de veces genera un polinomio de grado par/impar. De modo que el valor esperado de un número impar de campos es siempre cero, generalizando el resultado que obteníamos para un único campo.

2. Si $Z^{(n-k)}$ es el polinomio que tenemos cuando faltan k derivadas, podemos ignorar todos los términos de orden superior a k.

El primer resultado es más que nada una curiosidad, pero el segundo nos ayuda, pues nos permite empezar a ignorar términos, por si no queda claro porqué eso es verdad, vamos a explicarlo con un poco más de detalle. Dado que cada vez que derivamos podemos disminuir el grado de un polinomio en 1 como máximo, es imposible reducir un término de orden $k + 1$ o superior a orden cero derivando solamente k veces.

En nuestro caso el numero de derivadas totales que queremos hacer es $n = 4$, por lo que la derivada de (10) será $Z^{(3)} = Z^{(4-1)} \implies k = 1$, solo nos interesan los términos de grado 0 y 1:

$$
\begin{aligned}
\partial_{bcd} Z[J] &= 2K\left(2a_{kd}a_{lc}e^{a_{ij}x^ix^j}\frac{\partial x^l x^k}{\partial x^b} + a_{cd}\frac{\partial e^{a_{ij}x^ix^j}}{\partial x^b}\right) + \mathcal{O}\Big(x^2\Big) && (11)\\
&= 2K\left(2a_{kd}a_{lc}e^{a_{ij}x^ix^j}\left(\delta^l_b x^k + x^l\delta^k_b\right) + 2a_{cd}a_{kb}e^{a_{ij}x^ix^j}x^k\right) + \mathcal{O}\Big(x^2\Big) && (12)\\
&= 4K\left(a_{kd}a_{bc}e^{a_{ij}x^ix^j} + a_{bd}a_{kc}e^{a_{ij}x^ix^j} + a_{cd}a_{kb}e^{a_{ij}x^ix^j}\right)x^k + \mathcal{O}\Big(x^2\Big) && (13)
\end{aligned}
$$

Finalmente el último término solo nos interesa el termino de grado cero, entonces tenemos

$$
\begin{aligned}
\partial_{abcd} Z[J] &= 4K\left(a_{kd}a_{bc}e^{a_{ij}x^ix^j} + a_{bd}a_{kc}e^{a_{ij}x^ix^j} + a_{cd}a_{kb}e^{a_{ij}x^ix^j}\right)\frac{\partial x^k}{\partial x^a} + \mathcal{O}(x) && (14)\\
&= 4K\left(a_{kd}a_{bc}e^{a_{ij}x^ix^j} + a_{bd}a_{kc}e^{a_{ij}x^ix^j} + a_{cd}a_{kb}e^{a_{ij}x^ix^j}\right)\delta^k_a + \mathcal{O}(x) && (15)\\
&= 4K\left(a_{ad}a_{bc}e^{a_{ij}x^ix^j} + a_{bd}a_{ac}e^{a_{ij}x^ix^j} + a_{cd}a_{ab}e^{a_{ij}x^ix^j}\right) + \mathcal{O}(x) && (16)
\end{aligned}
$$

Por lo tanto

$$
\begin{aligned}
\partial_{abcd} Z[0] &= 4K\left(a_{ad}a_{bc} + a_{bd}a_{ac} + a_{cd}a_{ab}\right)\\
&= \frac{K}{m^4}\Big((A^{-1})_{ab}(A^{-1})_{cd} + (A^{-1})_{ac}(A^{-1})_{bd} + (A^{-1})_{ad}(A^{-1})_{bc}\Big) && (17)
\end{aligned}
$$

Finalmente, sustituyendo a (2)

$$
\boxed{\langle\phi_a\phi_b\phi_c\phi_d\rangle = \frac{1}{m^4}\left(A^{-1}_{ab}A^{-1}_{cd} + A^{-1}_{ac}A^{-1}_{bd} + A^{-1}_{ad}A^{-1}_{bc}\right)} \tag{18}
$$

Es importante entender que quitamos los paréntesis para simplificar pero $A^{-1}_{ij} \equiv (A^{-1})_{ij} \neq (A_{ij})^{-1}$.